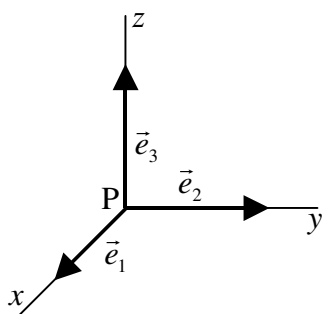


XI. ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ

§1. Parametrické rovnice přímky

Pozn.: Předpokládejme, že v množině E_3 , resp. E_2 (množina všech bodů v prostoru, resp. v rovině) je dána pevná ASS (afinní soustava souřadnic), která je dána 1 bodem (počátkem) a trojicí, resp. dvojicí lineárně nezávislých vektorů. Tzn., jestliže zvolíme umístění těchto vektorů tak, aby počátek ASS byl jejich počátečním bodem, pak přímky, které tyto vektory určují, jsou souřadné osy.



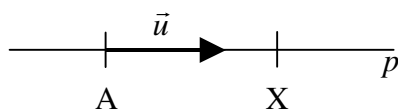
Def.: Necht' p je přímka, $\vec{u} \neq \vec{0}$ volný vektor takový, že existuje jeho umístění $\overrightarrow{AB}$ s vlastnostmi $A \in p, B \in p$. Pak vektor $\vec{u}$ nazýváme směrovým vektorem přímky p .

Pozn.: Místo přesného zápisu $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ se z tradičních důvodů užívá nepřesný zápis $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

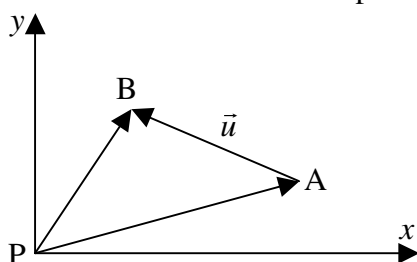
Pozn.: a) Směrový vektor přímky p není jediný, existuje jich nekonečně mnoho, všechny jsou navzájem rovnoběžné a nenulové.
b) Bude-li přímka zadána směrovým vektorem $\vec{u}$ a bodem A , zapíšeme to symbolem $p(A, \vec{u})$.

V.1.1.: Necht' $p(A, \vec{u})$ je přímka. Pak platí:

$$\boxed{\text{Bod } X \in E_3(E_2) \text{ leží na } p \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{u} .}$$



Pozn.: Necht' $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3] \in E_3; \vec{u}(u_1, u_2, u_3) = \overrightarrow{AB}$. V X. kapitole ve V.7.2 jsme dokázali, že $u_i = b_i - a_i, i \in \{1, 2, 3\}$. Místo přesného zápisu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$ se z tradičních důvodů užívá zápis $\overrightarrow{AB} = B - A$, neboť $P[0;0;0]$.



V.1.2.: Necht' $p(A, \vec{u})$ je přímka, $A[a_1, a_2, a_3], \vec{u}(u_1, u_2, u_3)$.

Pak platí: $X[x, y, z] \in p \Leftrightarrow \exists t \in R: X = A + t\vec{u}$

v souřadnicích: $x = a_1 + tu_1$

$$y = a_2 + tu_2 \quad (*)$$

$$z = a_3 + tu_3$$

Def.: Rovnici $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in R, \vec{u} \neq \vec{0}$, nazýváme parametrickou rovnicí přímky v E_3 , resp. E_2 , číslo t – parametr.

Soustavu (*) nazýváme parametrickými rovnicemi přímky (v souřadnicích) v E_3 (v E_2 by byly rovnice jen 2).

Pozn.: Přímku $p(A, \vec{u})$ lze v E_3 zapsat: $p = \{[a_1 + tu_1, a_2 + tu_2, a_3 + tu_3]; t \in R\}$
v E_2 : $p = \{[a_1 + tu_1, a_2 + tu_2]; t \in R\}$

§2. Vzájemná poloha dvou přímek

A) v E_2

Pozn.: Určení vzájemné polohy přímek:

Dáno: $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v}) \Rightarrow p = \{[a_1 + tu_1, a_2 + tu_2], t \in R\},$
 $q = \{[b_1 + rv_1, b_2 + rv_2], r \in R\}$

I. způsob: určíme průnik $p \cap q$:

$$\begin{aligned} a_1 + tu_1 &= b_1 + rv_1 \\ a_2 + tu_2 &= b_2 + rv_2 \end{aligned} \quad \text{-soustava 2 rovnic s neznámými } t, r$$

Soustava má: 1) 0 řešení $\Rightarrow p, q$ - různé rovnoběžky

2) 1 řešení $\Rightarrow p, q$ - různoběžky s průsečíkem P:

$$P[a_1 + t'u_1, a_2 + t'u_2] \text{ nebo } P[b_1 + r'v_1, b_2 + r'v_2]$$

3) nekonečně mnoho řešení $\Rightarrow p, q$ jsou totožné přímky

II. způsob: určíme, zda $\vec{u}, \vec{v}$ jsou rovnoběžné (lineárně závislé):

1) $\forall k \in R: \vec{u} \neq k \cdot \vec{v} \Rightarrow p \nparallel q \Rightarrow p, q$ - různoběžky

2) $\exists k \in R: \vec{u} = k \cdot \vec{v} \Rightarrow p \parallel q \Rightarrow$ a) $B \in p \Rightarrow p, q$ - totožné rovnoběžky

b) $B \notin p \Rightarrow p, q$ - různé rovnoběžky.

B) v E_3

Pozn.: Určení vzájemné polohy přímek:

$p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v}) \Rightarrow p = \{[a_1 + tu_1, a_2 + tu_2, a_3 + tu_3]; t \in R\}$
 $q = \{[b_1 + rv_1, b_2 + rv_2, b_3 + rv_3]; r \in R\}$

I. způsob: Porovnáním odpovídajících souřadnic získáme 3 rovnice o 2 neznámých t, r .

-soustava má 0 řešení $\Rightarrow p, q$ - různé rovnoběžky nebo mimoběžky (rozlišení provedeme na základě lineární závislosti nebo nezávislosti obou vektorů)

-ostatní – obdobně jako v E_2

II. způsob:

- 1) $\forall k \in R: \vec{u} \neq k \cdot \vec{v} \Rightarrow p \nparallel q$: a) $p \cap q \neq \emptyset \Rightarrow p, q$ – různoběžky
b) $p \cap q = \emptyset \Rightarrow p, q$ – mimoběžky
2) $\exists k \in R: \vec{u} = k \cdot \vec{v} \Rightarrow p \parallel q$: a) $B \in p \Rightarrow p = q$ – totožné rovnoběžky
b) $B \notin p \Rightarrow p, q$ – různé rovnoběžky

V případě 1) lze o vzájemné poloze přímek p, q rozhodnout též vyšetřením toho, zda trojice vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}$ je, resp. není lineárně závislá.

V.2.1.: Věta o vzájemné poloze dvou přímek

Nechť $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v})$ jsou dvě přímky. Pak platí:

- 1) $p \parallel q \wedge p = q \Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{AB} \rangle = 1$
2) $p \parallel q \wedge p \neq q \Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{AB} \rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1$
3) p, q – různoběžné $\Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{AB} \rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2$
4) p, q – mimoběžné $\Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{AB} \rangle = 3$

§3. Další typy rovnice přímky v E_2

Pozn.: Předpokládejme, že v E_2 je pevně dána kartézská soustava souřadnic, která je dána jedním bodem (počátkem) a dvěma kolmými jednotkovými vektory.

Pozn.!: Obecná rovnice přímky v E_2

Nechť $p(A, \vec{u})$ je přímka v $E_2 \Rightarrow p: x = a_1 + tu_1 \quad / \cdot u_2$

$$y = a_2 + tu_2 \quad / \cdot (-u_1)$$

$$u_2x - u_1y = a_1u_2 - a_2u_1$$

$$\underbrace{u_2x}_{a_1} - \underbrace{u_1y}_{-b} + \underbrace{a_2u_1 - a_1u_2}_c = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow ax + by + c = 0}, [a, b] \neq [0; 0]$$

Def.: Rovnici $ax + by + c = 0$, kde $[a, b] \neq [0; 0]$ nazýváme obecnou rovnicí přímky v E_2 .

Pozn.: Obecná rovnice přímky v E_2 není určena jednoznačně, každý její nenulový násobek je rovnicí téže přímky.

Pozn.: Koeficienty a, b lze považovat za souřadnice vektoru kolmého ke směrovému vektoru přímky p .

[Dk.: Nechť přímka p má směrový vektor $\vec{u}$ a nechť vektor $\vec{n} = (a, b)$. Pak platí:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = au_1 + bu_2 \Rightarrow (\text{podle pozn.}) a \cdot (-b) + b \cdot a = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u}]$$

Def.: Vektor kolmý ke směrovému vektoru přímky p se nazývá normálový vektor přímky p a značí se $\vec{n}$.

Pozn.: Směrnice tvar rovnice přímky v E_2

Nechť $p: ax + by + c = 0, b \neq 0$.

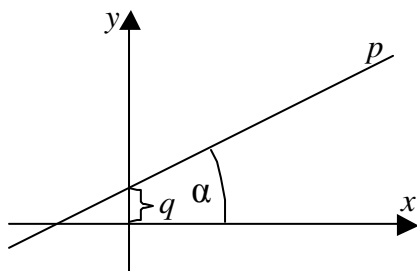
$$\Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Označme $-\frac{a}{b} = k; -\frac{c}{b} = q$

$$\Rightarrow \underline{y = kx + q}$$

Def.: Rovnice $y = kx + q$ se nazývá směrnice tvarem rovnice přímky v E_2 , k je směrnice přímky.

Pozn.: a) Geometrický význam čísel k, q :



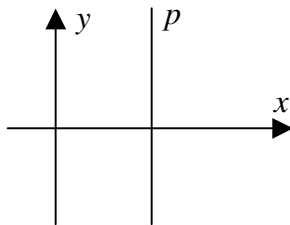
$$p: y = kx + q$$

$$\boxed{k = \operatorname{tg} \alpha}$$

průsečík přímky p s osou y v bodě $[0; q]$

$k = \frac{u_2}{u_1}$, kde $\vec{u}(u_1, u_2)$ je směrový vektor přímky p .

b) Směrnice tvar neexistuje pro přímky rovnoběžné s osou y .



$(\alpha = 90^\circ, \operatorname{tg} 90^\circ \text{ neexistuje})$

c) Přímka p je dána směrnici k a bodem $[x_1, y_1]$

$$y = kx + q$$

$$[x_1, y_1] \in p \Rightarrow y_1 = kx_1 + q$$

$$q = y_1 - kx_1$$

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

$$\boxed{y = k(x - x_1) + y_1}$$

d) Přímka p je určena dvěma body $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$

$$y = kx + q$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

Pozn.: Úsekový tvar rovnice přímky v E_2

Nechť $p: ax + by + c = 0; a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y + 1 = 0$$

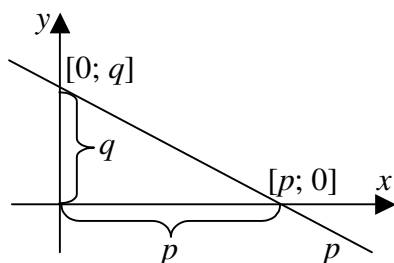
$$-\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1.$$

Označme $-\frac{c}{a} = p; -\frac{c}{b} = q \Rightarrow \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}; p, q \neq 0.$

Def.: Rovnici $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1; p, q \neq 0$ nazýváme úsekovým tvarem rovnice přímky v E_2 .

Pozn.: a) Geometrický význam čísel p, q :



b) Úsekový tvar neexistuje pro přímky rovnoběžné s osou x , rovnoběžné s y , procházející počátkem soustavy souřadnic.

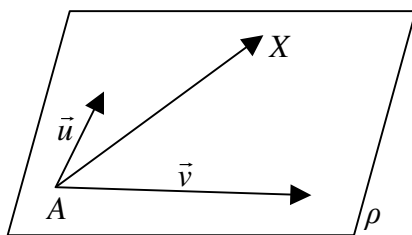
§4. Rovnice roviny v E_3

Pozn.: Předpokládejme, že rovina $\rho \subseteq E_3$ je zadána bodem A a dvojicí lineárně nezávislých vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. Zapisujeme $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Def.: Necht' ρ je rovina, $\vec{u}, \vec{v}$ nenulové lineárně nezávislé volné vektory takové, že existuje jejich umístění $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ takové, že $A, B, C \in \rho$. Pak vektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazýváme zaměřením roviny ρ .

V.4.1.: Necht' $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$ je rovina. Pak platí:

Bod $X \in E_3$ leží v rovině $\rho \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Leftrightarrow \exists r, s \in R : \overrightarrow{AX} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$.



V.4.2.: Necht' $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$ je rovina, $A[a_1, a_2, a_3], \vec{u}(u_1, u_2, u_3), \vec{v}(v_1, v_2, v_3)$. Pak platí:

Bod $X[x, y, z] \in \rho \Leftrightarrow \exists r, s \in R : \boxed{X = A + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}}$

v souřadnicích: $x = a_1 + r \cdot u_1 + s \cdot v_1$

$$y = a_2 + r \cdot u_2 + s \cdot v_2 \quad (*)$$

$$z = a_3 + r \cdot u_3 + s \cdot v_3 \quad ; r, s \in R.$$

Def.: Rovnici $X = A + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} ; r, s \in R ; \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ nazveme parametrickou rovnicí roviny v E_3 , čísla r, s parametry.

Soustavu (*) nazýváme parametrickými rovnicemi roviny (v souřadnicích).

Pozn.: Parametrickou rovnici roviny $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$ též zapisujeme $\rho = \{[a_1 + ru_1 + sv_1, a_2 + ru_2 + sv_2, a_3 + ru_3 + sv_3] ; r, s \in R\}$.

Pozn.: Obecná rovnice roviny

Necht' $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$ je rovina, $A[a_1, a_2, a_3], \vec{u}(u_1, u_2, u_3), \vec{v}(v_1, v_2, v_3)$.

Pak rovina ρ má tyto rovnice: $x = a_1 + ru_1 + sv_1$

$$y = a_2 + ru_2 + sv_2$$

$$z = a_3 + ru_3 + sv_3 \quad ; r, s \in R.$$

Eliminací parametrů r, s a vhodným označením koeficientů A, B, C, D (analogie odvození obecné rovnice přímky) získáme tvar

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}, \text{ kde } [A, B, C] \neq [0; 0; 0].$$

Def.: Rovnici $Ax + By + Cz + D = 0$, kde $[A, B, C] \neq [0; 0; 0]$ nazýváme obecnou rovnicí roviny.

Pozn.: Koeficienty A, B, C lze považovat za souřadnice vektoru kolmého k rovině ρ , tzn. normálového vektoru roviny ρ : $\vec{n} = (A, B, C), \vec{n} \perp \vec{u}, \vec{n} \perp \vec{v}$.

§5. Vzájemná poloha dvou rovin

V.5.1.: Věta o vzájemné poloze dvou rovin daných obecnými rovnicemi

Nechť $\rho: ax + by + cz + d = 0$, $\sigma: ex + fy + gz + h = 0$ jsou roviny.

Pak platí: I. $\rho = \sigma \Leftrightarrow \exists k \in R: (a, b, c, d) = k \cdot (e, f, g, h)$

II. $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma \Leftrightarrow \exists k \in R: (a, b, c) = k \cdot (e, f, g) \wedge d \neq k \cdot h$

III. $\rho \nparallel \sigma \Leftrightarrow \forall k \in R: (a, b, c) \neq k \cdot (e, f, g)$.

nebo neexistuje takové $k \in R: (a, b, c) = k \cdot (e, f, g)$

V.5.2.: Věta o vzájemné poloze dvou rovin daných parametrickými rovnicemi

Nechť $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$, $\sigma(B, \vec{k}, \vec{l})$ jsou roviny.

Pak platí: I. $\rho = \sigma \Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \vec{AB} \rangle = 2$

II. $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma \Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l}, \vec{AB} \rangle = 3$

III. $\rho \nparallel \sigma \Leftrightarrow \dim\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}, \vec{l} \rangle = 3$.

§6. Vzájemná poloha přímky a roviny

V.6.1.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny dané parametrickými rovnicemi

Nechť $p(A, \vec{u})$ je přímka, $\rho(B, \vec{v}, \vec{w})$ rovina.

Pak platí: I. $p \subseteq \rho \Leftrightarrow \dim\langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \vec{AB} \rangle = 2$

II. $p \parallel \rho \wedge p \not\subset \rho \Leftrightarrow \dim\langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 2 \wedge \dim\langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \vec{AB} \rangle = 3$

III. $p \nparallel \rho \Leftrightarrow \dim\langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 3$.

V.6.2.: Věta o vzájemné poloze přímky a roviny dané obecnou rovnicí

Nechť $p(A, \vec{u})$ je přímka, $\rho: ax + by + cz + d = 0$, $[a, b, c] \neq [0; 0; 0]$ rovina. Nechť $\vec{n} = (a, b, c)$.

Pak platí: I. $p \subseteq \rho \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \wedge A \in \rho$

II. $p \parallel \rho \wedge p \not\subset \rho \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \wedge A \notin \rho$

III. $p \nparallel \rho \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$.